



سَنَیْشِ دَو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

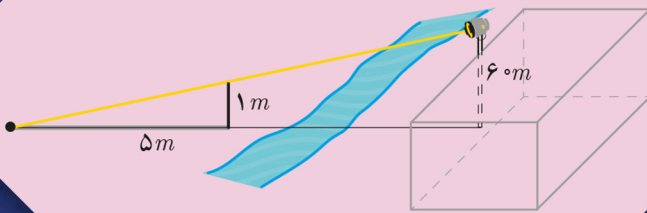
ویژه پایه یازدهم

دی ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۲

ریاضی ۲ (رشته علوم تجربی)



۱۴۰۳-۱۴۰۴



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

گروه ریاضی
سید محمد امیرحسین شاکری
۱۳۹۴

حسابان و
ریاضی پایه

مسئول درس: علیرضا فاطمی
دستیار: مهدی پوررضایی

حسین شفیع زاده • علیرضا فاطمی • سید امیرمحمد سید شاکری

هندسه

مسئول درس: محمد تقی پور
دستیار: هادی کاظم نژاد

سیدمحسن میراسلامی • امیدرضا پورحسینی • هادی کاظم نژاد
سعید اکبرزاده

ریاضیات
گستره

مسئول درس: حسین اسدزاده
دستیار: مریم حسینی

سعید اکبرزاده • سوگند روشنی • پرمیدا هادی پور

ریاضی
تجربی

مسئول درس: امیرحسین شریفیان
دستیار: امین کبیری

ایمان اردستانی • محمد خان گلدی

ریاضی
انسانی

مسئول درس: عباس سعیدی
دستیار: امیرحسین حریری

امیدرضا پورحسینی • محمد منتظران • حسین خواجه وند
حسین افسری • مجید یوسف زاده

زیست
شناسی

مسئول درس: علی جوهری

امیر کبیری راد • منصوره رئیس دانا • بتول خواجه پور

فیزیک

مسئول درس: مهدی نیکوگفتار

احمد رضوانی • مهرناز طلوع شمس • مریم حیدری
یوسف صباغی

شیمی

مسئول درس: محمد وحیدی

شهرام شاه پرویزی • محمد وحیدی • سبحان دقیق
محمدعلی توسلی فر

زمین
شناسی

مسئول درس: شکبیا کریمی

فرزانه رجایی • حسن علی محمدی

انسان و
محیط زیست

مسئول درس: شکبیا کریمی

محبوبه کاظمی

سلامت و
بهداشت

مسئول درس: علیرضا رضایی نیا

علیرضا رضایی نیا

گروه علوم
سید محمد حسین کشانی
۱۳۹۴

طراحان

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷گروه
عمومیادبیات
فارسیمسئولین درس:
عماد فیض آبادی
محسن ابراهیم تهرانیابوالفضل غلامی • افشین محی الدین • احسان محسنی
عماد فیض آبادی • محسن ابراهیم تهرانیدین و
زندگیمسئولین درس:
علی اکبر آخوندی
زهره محمدیمحمد کریمی • علیرضا دلشاد • علی اکبر آخوندی
زهره محمدی • محبوبه ابتهسامزبان
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری • سعید ابراهیمی • امین امیدوار

علوم و
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

فاطمه اکران • گلاویژ جلالی • مینا پژنگ
مهرآوه مجتهدجامعه
شناسیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفریفروغ تیموریان • آریتا بیدقی • علیرضا مختاری
الهام میرزایی • آزاده میرزایی • الهام رضاییروان
شناسیمسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانی

مهدی پارچه باف

زبان
عربیمسئولین درس:
پویا رضاداد
مائده خدایاری
دستیار: سارا حمزهاسرافیل قربان پور • محسن احدی • کیارش پورمهدی
امینه کارآمد • زهرا فرزانه

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسبمهسا اصغری • سامان بهری • زهره قموشی
الهه ریاحی نسب

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهرروز یحیی • مهسا اصغری • الهه ریاحی نسب

فلسفه
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری • حسین صادقی • سیاوش خداشناس

اقتصاد

مسئول درس: امیر محمدبیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

آیدانا رستمی

هویت
اجتماعیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

رضا کیانپور

گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷

طراحان





-۱

الف) درست

نکته: مستطیل طلائی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \text{ دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب } x \text{ و } y \text{ باشند، داشته باشیم:}$$

ب) نادرست

نکته: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آن‌ها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

پ) نادرست

نکته: دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

(۱) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

(۲) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

ت) درست

نکته: اگر D اندازه زاویه α برحسب درجه و R اندازه زاویه α برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

برای تبدیل زاویه $\frac{2\pi}{9}$ رادیان به درجه داریم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{2\pi}{9}}{\pi} \Rightarrow D = 40^\circ$$

چون زوایای 40° و 50° درجه متمم هستند، پس عبارت داده شده درست است.

-۲

الف) a و c

برای آنکه معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد، لازم است مقدار Δ در آن بزرگ‌تر از صفر باشد، چنانچه a و c هم علامت نباشند، داریم:

$$ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

ب) استنتاجی

نکته: استدلال استنتاجی، استدلالی است که براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

پ) -۴

نکته: تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح، را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد.

$$[2[-1/5]] = [2(-2)] = [-4] = -4$$

ت) دوم

از آنجا که π رادیان (مرز ناحیه دوم و سوم) تقریباً برابر $3/14$ رادیان است، پس انتهای کمان 3 رادیان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی واقع است.

-۳

الف) گزینه ۲

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$.

$$A(x, y), B(3, -2) \Rightarrow N(\frac{x+3}{2}, \frac{y-2}{2}) = (-2, 1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{2} = -2 \Rightarrow x = -7 \\ \frac{y-2}{2} = 1 \Rightarrow y = 4 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 1$$

ب) گزینه ۱

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) باشند، آن‌گاه:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

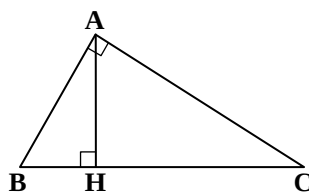
اگر $x^2 = k$ باشد، خواهیم داشت: $k^2 - 3k + 1 = 0$. در این معادله مجموع ریشه‌ها برابر 3 و حاصل ضرب آن‌ها برابر 1 است. پس دارای 2

ریشه مثبت α و β می‌باشد. بنابراین: $x = \pm\sqrt{\beta}$ و $x = \pm\sqrt{\alpha}$.



پ) گزینه ۲

نکته (روابط طولی در مثلث قائم الزاویه):



$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot BC$$

$$AH^2 = BH \cdot CH$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC$$

در مثلث قائم الزاویه ABH مطابق قضیه فیثاغورس داریم:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow BH = 4$$

اکنون براساس روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABD می توان نوشت:

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 25 = 4 \times BD \Rightarrow BD = \frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4}$$

ت) گزینه ۳

نکته: با جابه جا کردن مؤلفه های زوج مرتب (a, b) می توان زوج مرتب (b, a) را به دست آورد. حال اگر مؤلفه های همه زوج های مرتب تابع f را جابه جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می آید که آن را وارون تابع f می گوئیم و با f^{-1} نشان می دهیم.

اگر تابع f^{-1} از نقطه (a, b) عبور کند، تابع f از (b, a) می گذرد.

با بررسی گزینه ها، واضح است که نقطه گزینه ۳ روی وارون تابع f قرار دارد.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = \frac{5}{4}$$

-۴

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ابتدا معادله خط را می نویسیم:

$$m = \frac{1 - (-3)}{1 - (-1)} = 2$$

$$y = 2x + h \xrightarrow{(1,1)} 1 = 2 \times 1 + h \Rightarrow h = -1 \Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

مساحت دایره برابر 20π است. پس:

$$\pi r^2 = 20\pi \Rightarrow r^2 = 20 \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$$

فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$OH = \frac{|2a - 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|2a - 4|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2|a - 2| = 10 \Rightarrow |a - 2| = 5 \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 5 \Rightarrow a = 7 \\ a - 2 = -5 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

-۵

نکته: اگر α و β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) باشند، آن گاه:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

راه حل اول:

$x = 3$ ریشه معادله است؛ بنابراین در معادله صدق می کند.

$$a \times 3^2 + b \times 3 + c = 0 \Rightarrow 9a + 3b + c = 0 \xrightarrow{b=3c} 9a + 10c = 0 \Rightarrow 9a = -10c \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{9}{10}$$

حاصل ضرب ریشه ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 3\beta = -\frac{9}{10} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{10}$$



راه حل دوم:

$x = 3$ ریشه معادله است؛ بنابراین در معادله صدق می کند.

$$a \times 3^2 + b \times 3 + c = 0 \Rightarrow 9a + 3b + c = 0 \xrightarrow{c=\frac{b}{3}} 9a + \frac{10}{3}b = 0 \Rightarrow 9a = -\frac{10}{3}b \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{27}{10}$$

حاصل جمع ریشه ها برابر $-\frac{b}{a}$ است.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow 3 + \beta = \frac{27}{10} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{10}$$

-۶

(الف)

نکته: برای حل یک معادله گویا می توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج ها، در کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب های به دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب ها باید در معادله اولیه صدق کنند.

دو طرف معادله را در $x(x+3)(x+6)$ ضرب می کنیم.

$$3x(x+6) + 12(x+3) = 2(x+3)(x+6) \Rightarrow x^2 + 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ غ ق} \\ x=-12 \checkmark \end{cases}$$

جواب $x=0$ مخرج کسر دوم و سوم را صفر می کند پس غیرقابل قبول است.

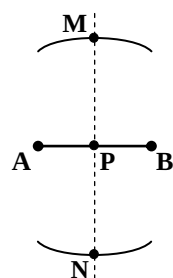
(ب)

نکته: برای حل یک معادله رادیکالی می توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب های حاصل در معادله اولیه صدق می کنند. دو طرف معادله را به توان ۲ می رسانیم.

$$2x-5 = (x-4)^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ غ ق} \\ x=7 \checkmark \end{cases}$$

جواب $x=3$ در معادله اصلی صدق نمی کند، پس غیرقابل قبول است.

-۷



نکته: هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.
نکته: تمام نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابتی باشند، بر دایره ای به مرکز آن نقطه واقع هستند.

ابتدا عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم:

اگر به مرکز P وسط پاره خط AB و به شعاع ۲ دایره ای رسم کنیم، عمودمنصف را در ۲ نقطه M و N قطع می کند.

این دو نقطه جواب های مسئله می باشند.

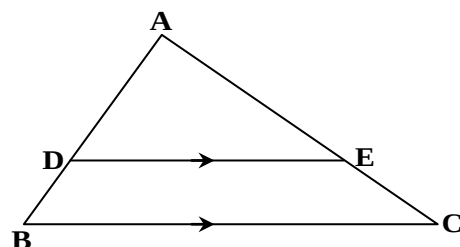
-۸

نکته (قضیه تالس و تعمیم آن):

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد. آن گاه:

$$\text{تالس (جزء به جزء): } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{تعمیم تالس (جزء به کل): } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



راه حل اول:

در مثلث قائم الزاویه ABC رابطه فیثاغورس را می نویسیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

با توجه به اینکه AB و EF هر دو بر AC عمود هستند، پس با هم موازی هستند. بنابراین می توان در مثلث ABC تعمیم قضیه تالس را نوشت:

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{CB-CE}{CB} = \frac{CA-CF}{CA} \Rightarrow \frac{BE}{CB} = \frac{AF}{CA} \Rightarrow \frac{BE}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow BE = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$



راه حل دوم:

با توجه به اینکه AB و EF هر دو بر AC عمود هستند، پس با هم موازی هستند. بنابراین می توان در مثلث ABC تعمیم قضیه تالس را نوشت:

$$\frac{CF}{CA} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{EF}{3} \Rightarrow EF = \frac{9}{4}$$

در مثلث قائم الزاویه CEF رابطه فیثاغورس را می نویسیم:

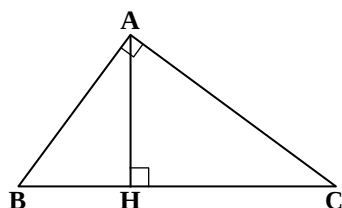
$$CE^2 = 3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{225}{16} \Rightarrow CE = \frac{15}{4}$$

اکنون در مثلث ABC قضیه تالس را می نویسیم:

$$\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{\frac{15}{4}}{BE} \Rightarrow BE = \frac{5}{4} = 1/25$$

-۹

نکته (روابط طولی در مثلث قائم الزاویه):



$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot BC$$

$$AH^2 = BH \cdot CH$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC$$

روابط طولی را در مثلث قائم الزاویه ABC می نویسیم:

$$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow (4\sqrt{2})^2 = CH \cdot (CH + 2) \Rightarrow CH^2 + 2CH - 48 = 0 \Rightarrow (CH - 6)(CH + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} CH = 6 \\ CH = -8 \end{cases} \text{ غ ق}$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow AB^2 = 2 \times (2 + 6) = 16 \Rightarrow AB = 4$$

-۱۰

مثلث های $\triangle ABC$ و $\triangle ACD$ متشابه اند. زیرا:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

بنابراین اگر طول AD را x بنامیم، داریم:

$$\frac{x}{4} = \frac{4}{x+6} \Rightarrow x^2 + 6x = 16 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 2 \end{cases} \text{ غ ق}$$

-۱۱

نکته: دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

$$D_f : 16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow D_f = [-4, 4]$$

$$D_g : \begin{cases} 4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \\ 4 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_g = [-4, 4]$$

دو تابع f و g برابرند، زیرا دامنه و ضابطه آن ها برابر است.

-۱۲

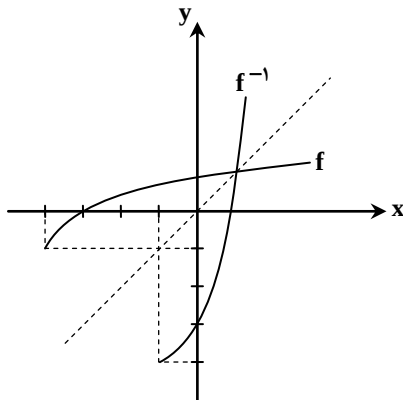
نکته: تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح، را نسبت می دهد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از آن عدد را نسبت می دهد.

با توجه به رابطه $\left[2x - \frac{1}{2}\right] = 2$ می توان نوشت:

$$2 \leq 2x - \frac{1}{2} < 3 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq 2x < \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{5}{4} \leq x < \frac{7}{4}$$

-۱۳

(الف)



نکته: برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قریبۀ نمودار آن تابع را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم یعنی خط $y = x$ رسم کنیم.
برای رسم نمودار تابع $f(x) = -1 + \sqrt{x+4}$ می‌بایست نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ را چهار واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

(ب)

نکته: برای به دست آوردن ضابطۀ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت مانند f ، در معادلۀ $y = f(x)$ را بر حسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن x و y ضابطۀ تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$y = \frac{2x-1}{3} \Rightarrow 2x-1 = 3y \Rightarrow 2x = 3y+1 \Rightarrow x = \frac{3y+1}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$$

-۱۴

نکته (اعمال روی توابع): عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شود.

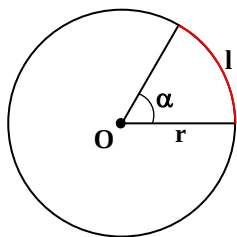
نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
ضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

دامنۀ تابع f برابر $\{2, -1, 3, 4\}$ و دامنۀ تابع g برابر $\{-2, -1, 4\}$ می‌باشد. بنابراین دامنۀ $f-g$ که همان اشتراک دامنۀ f و g است به صورت $\{-1, 4\}$ است. در مورد $\frac{g}{f}$ چون $f(4) = 0$ می‌باشد، پس دامنۀ $\frac{g}{f}$ برابر $\{-1\}$ است. بنابراین داریم:

$$f-g = \{(-1, 2-1), (4, 0-2)\} = \{(-1, 1), (4, -2)\}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{(-1, \frac{1}{-1})\right\}$$

-۱۵



نکته ۱: اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه α اندازه شعاع دایره و α اندازه زاویه برحسب رادیان باشد، آن‌گاه رابطۀ مقابل بین آن‌ها برقرار است:

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطۀ بالا l و r هم واحدند.

نکته ۲: اگر D اندازه زاویه α برحسب درجه و R اندازه زاویه α برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

اگر طول کمان AB را l و طول کمان $A'B'$ را l' بنامیم، خواهیم داشت:

$$\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\theta$$

$$\theta + 1 = \frac{l'}{r} \Rightarrow l' = r\theta + r$$

$$l + l' = 5 \Rightarrow 5\theta + r = 5 \Rightarrow \theta = \frac{r}{5} \text{ رادیان}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{r}{5}}{\pi} \Rightarrow D = \left(\frac{72}{\pi}\right)^\circ$$